4/5/2017

Εκτιμήτές Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΕΜΠ)

Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ (είτε $\mathbb{R}^n$)

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ η παρατηρούμενη τιμή του $X_1, \ldots, X_n$

Ορισμός: (Πιθανοφάνεια)

Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$ και έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ η παρατηρούμενη τιμή του τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Η πιθανοφάνεια ή συνάρτηση πιθανοφάνειας συμβολίζεται με L, είναι μια συνάρτηση της $\theta \in \Theta$ και ορίζεται ως

$$L = L(\theta) = L(\theta / \underline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

Scanned by CamScanner

Ορισμός: (εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας)

Αν $L = L(\theta)$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας τότε ο ΕΜΠ της παραμέτρου θ, συμβολίζεται με $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \hat{\theta}$

και ορίζεται ως: $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$

ή $\hat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$

Παρατήρηση: Δικαιολόγηση ορισμών

(1)

$$L(\theta) = f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) \simeq P_\theta(x_1 - \varepsilon \le X_1 \le x_1 + \varepsilon, \ldots, x_n - \varepsilon \le X_n \le x_n + \varepsilon)$$

$= P_\theta$(πραγματοποίησης της παρατηρησιμότητας τιμής $x_1, x_2, \ldots, x_n$ του $X_1, X_2, \ldots X_n$)

(2) Εφαρμογή της μεθόδου είναι θέμα μεγιστοποίησης

(3) Επειδή οι κατανομές είναι κατά κανόνα εκθετικής μορφής μεγιστοποιούμε το λογάριθμο της πιθανοφάνεια

οπότε ΕΜΠ: $\hat{\theta} = \arg_{\theta \in \Theta} \log L(\theta)$

Παράδειγμα 1: Έστω τ.δ $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$

Να βρεθούν οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας στις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\mu = \theta$ άγνωστο και σ^2 γνωστό

$$f_X(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i, \theta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\log(L(\theta))\right) = 0 \iff \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log(L(\theta))) = -\frac{1}{\sigma^2} < 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Παρατήρηση: Ε.Μ.Π ≡ ΑΟΕΔ

(ii) Περίπτωση (ii): $\mu =$ γνωστό, $\sigma^2 = \theta$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\theta})^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\theta) - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\cancel{2}\theta^{\cancel{2}}} = \frac{n}{\cancel{2}\cancel{\theta}} \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\log L(\theta)\right) < 0$$

Περίπτωση 3: μ: άγνωστο, σ^2: άγνωστο

$$L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i,\mu,\sigma^2) = (\sigma^2)^{-n/2}(\sqrt{2\pi})^{-n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\log\left(L(\mu,\sigma^2)\right)\right) = -\frac{1}{\cancel{2}\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(\log\left(L(\mu,\sigma^2)\right)\right) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \quad (2)$$

$(1) \Rightarrow \mu = \bar{X}$

$$(2) \xRightarrow{\mu=\bar{X}} \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2$$

Κριτήριο 2ης παραγώγου:
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} & \frac{\partial}{\partial \mu\, \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2}{\partial \sigma\, \partial \mu} & \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \end{vmatrix} < 0$$

Οι ΕΜΠ είναι $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2$

Παράδειγμα: Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $P(\theta)$. Να βρεθεί ε.Μ.Π της θ.

$$p(x,\theta) = \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta) = \frac{e^{-n\theta} \cdot \theta^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$\log L(\theta) = -n \cdot \theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \log(\theta) - \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(\theta) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = 0 \Leftrightarrow n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \overline{X}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log L(\theta) = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} < 0$$

Άρα, $\hat{\theta} = \overline{X}$

Παράδειγμα: Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ από $U[0,\theta]$

Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π της θ

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot I_{[0,\theta]}(x_i)$$

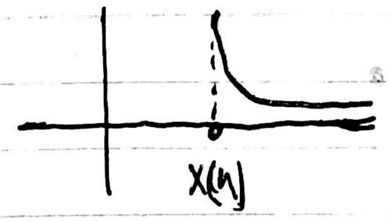
$$\Rightarrow L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{[0,\theta]}(x_i) \quad (*)$$

$$\prod_{i=1}^{n} I_{[0,\theta]}(x_i) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x_i \leq \theta, \forall i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \theta \geq x_{(n)} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \theta \geq x_{(n)} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι $L \downarrow$ για $\theta \geq X(n)$



Άρα η L μεγιστοποιείται στο $\theta = X(n)$
Άρα ο ΕΜΠ $\hat{\theta} = X(n)$

Παράδειγμα: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τδ από $U[\theta, \theta+1]$, $\theta \in \mathbb{R}$
Να βρεθεί ο ΕΜΠ της θ

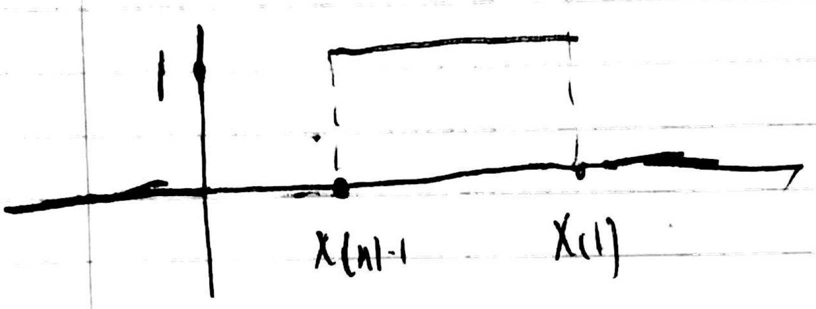
$$\varphi(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta+1-\theta}, & \theta \leq x \leq \theta+1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} 1 \cdot I_{(\theta,\theta+1)}(x_i) \quad (*)$$

$$\prod_{i=1}^{n} I(x_i) = \begin{cases} 1, & \theta \leq x \leq \theta+1, \ \forall i \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \theta \leq X(1),\ \theta \geq X(n)-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & X(n)-1 \leq \theta \leq X(1) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα, $L(\theta) \overset{(*)}{=} \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,\theta+1)}(x_i) = \begin{cases} 1, & X(n)-1 \leq \theta \leq X(1) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



Άρα, η $L(\theta)$ μεγιστοποιείται $\forall \theta \in [X_{(n)}-1, X_{(1)}]$

άρα κάθε $\theta \in [X_{(n)}-1, X_{(1)}]$ είναι Ε.Μ.Π.

Παράδειγμα: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από

$\Gamma(a,\beta)$. Να βρεθεί ο ΕΜΠ των a, β

$$f(x,a,\beta) = \frac{x^{a-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\Gamma(a) \cdot \beta^{a}}, \quad x>0,\ a>0,\ \beta>0$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,a,\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{a-1} \cdot e^{-x_i/\beta}}{\Gamma(a) \cdot \beta^{a}}$$

$$= \left(\Gamma(a) \cdot \beta^{a}\right)^{-n} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} \cdot e^{-\sum x_i/\beta}$$

$$\log L = -n \log(\Gamma(a)) - na\log \beta + (a-1)\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \frac{1}{\beta}\sum x_i$$

$$\frac{\partial(\log L)}{\partial a} = -n\log\beta - \frac{n\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i) \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\log L)}{\partial \beta} = 0 \Leftrightarrow a\cdot\beta = \bar{X} \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \beta = \frac{\bar{X}}{a}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} -n\cdot\log\left(\frac{\bar{X}}{a}\right) - \frac{n\cdot\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

Δεν υπάρχει αναλυτική λύση ως προς a

Μπορεί να βρεθεί αριθμητική λύση ως προς a

Παράδειγμα: Έστω τ.δ $X_1,\dots,X_n$ από $U[\theta_1,\theta_2]$, θ_1,θ_2 άγνωστα, $\theta_1<\theta_2$. Να βρεθούν Ε.Μ.Π των θ_1 και θ_2

$$f(x_i,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 < x_i < \theta_2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$L(\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} \prod I_{[\theta_1,\theta_2]}^{(x_i)}$$

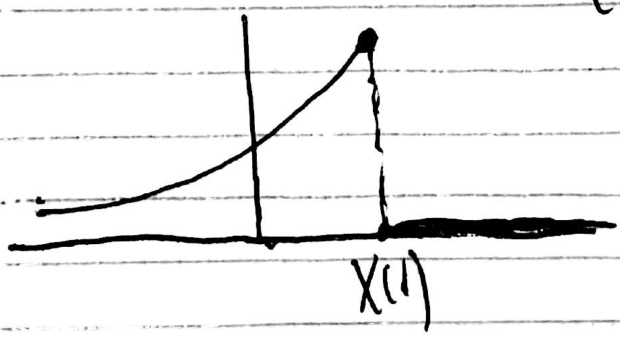
$$\prod_{i=1}^{n} I_{[\theta_1,\theta_2]}^{(x_i)} = \begin{cases} 1, & \theta_1 \le x_i \le \theta_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \theta_1 \le x_{(1)},\ \theta_2 \ge x_{(n)} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \theta_1 \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le \theta_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n},\ \theta_1 \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le \theta_2$$

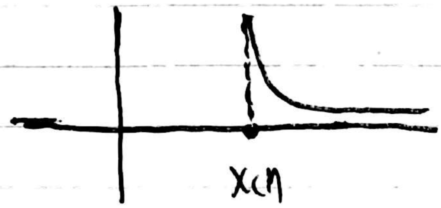
Μονοτονία L ως προς θ_1:

$$\frac{\partial L(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1} = + \frac{n(\theta_2-\theta_1)^{n-1}}{(\theta_2-\theta_1)^{2n}} > 0$$



Άρα $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$

$$\frac{\partial L(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2} = -\frac{n(\theta_2-\theta_1)^{n-1}}{(\theta_2-\theta_1)} < 0 \quad . \text{ Άρα } \hat{\theta}_2 = X(n)$$



Επομένως Ε.Μ.Π : $\hat{\theta}_1 = X(1)$, $\hat{\theta}_2 = X(n)$

Παράδειγμα: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ από κατανομή Laplace

με $f(x,\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} , & x \geq \theta, \ \theta \in \mathbb{R} \\ 0 , & \text{αλλού} \end{cases}$

Να βρεθεί Ε.Μ.Π του θ.

Λύση: $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} I_{[\theta,+\infty)}(x_i)$

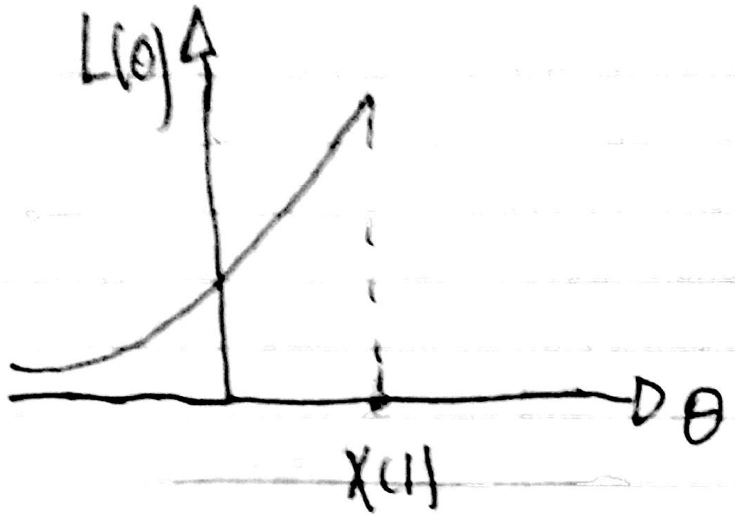
$$= e^{-\Sigma x_i} \cdot e^{n\theta} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,+\infty)}(x_i) = e^{-\Sigma x_i} \cdot e^{n\theta} , \ X(1) \geq \theta$$

$$\prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,+\infty)}(x_i) = \begin{cases} 1, & X(1) \geq \theta \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = e^{-\Sigma x_i} \cdot e^{n\theta} \cdot n > 0 \Rightarrow L \uparrow \quad \forall \ \theta \in (-\infty, X(1)]$

$\Rightarrow$ θ μεγιστοποιείται για $\theta = X(1)$

Άρα αφού $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \not> 0 \Rightarrow \hat{\theta} = X(1)$



Ασκηση: Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x, \theta_1, \theta_2) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2}}$, $\theta_1 < x < \theta_2$ με $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$. Να βρεθούν οι Ε.Μ.Π των θ_1, θ_2

Ιδιότητες Ε.Μ.Π

Έστω τ.δ $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $f(x, \theta)$

(i) Ο Ε.Μ.Π είναι συνάρτηση του επαρκούς στατιστικού

Απόδειξη: Έστω $T(\underline{X})$ επαρκής από Θ Neyman-Fisher

$\Rightarrow f(\underline{x}, \theta) = g(T(\underline{x}), \theta) \cdot h(\underline{x})$

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = L(\theta) = g(T(\underline{x}), \theta) \cdot h(\underline{x})$

Ο Ε.Μ.Π θα προκύψει από μεγιστοποίηση ως προς θ της g. Άρα, θα είναι συνάρτηση του $T(\underset{\sim}{X})$

(ii) Αν $\hat{\theta}$ ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας και g είναι 1-1 τότε ο εκτιμητής της $g(\theta)$ είναι $g(\hat{\theta})$

(iii) Ο Ε.Μ.Π είναι (κατά κανόνα) συνεπής

(iv) Ο Ε.Μ.Π είναι ασυμπτωτικά κανονικός

(Αν πληρούνται οι συνθήκες κανονικότητας της C-R αποδεικνύεται ότι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας. $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{D} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$

ή $\hat{\theta} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{προσ.}}{\sim}} \left(\theta, \frac{1}{n\cdot I(\theta)}\right)$ ← ΚΦC-R